Title	Hartree方程式の修正波動作用素について (調和解析学と非線形偏微分方程式)
Author(s)	中西, 賢次
Citation	数理解析研究所講究録 (2001), 1235: 28-44
Issue Date	2001-10
URL	http://hdl.handle.net/2433/41531
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録 1235 巻 2001 年 28-44

Hartree 方程式の修正波動作用素について

神戸大学理学部数学科 中西賢次
Dept. of Math., Kobe Univ. Kenji Nakanishi
(現所属：名古屋大学大学院多元数理科学研究科)

イントロ

次の Hartree 型方程式を考える。

$$2i\dot{u}-\Delta u+V(u)u=0, \tag{1}$$

ここで $u(t,x):\mathbb{R}^{1+n}\to\mathbb{C}$ は未知関数,

$$V(u):=\lambda|x|^{-\nu}*|u|^{2}, \tag{2}$$

$\lambda\in\mathbb{R}$, $0<\nu<n$ は定数, $*$ は $x\in\mathbb{R}^{n}$ に関する合成積。上の方程式は多粒子系 Schrödinger 方程式の平均近似として考えられ，その場合 $|u|^{2}$ が粒子密度，$V(u)$ は u 自身が生成する電場のポテンシャルを表す。また，上の方程式は古典的場の理論における：Maxwell-Klein-Gordon あるいは Maxwell-Dirac 方程式系の非相対論近似としても現れる。ここでは非線形波動の方程式のプロトタイプとして上の Hartree 方程式を扱い，その時刻大での一般解の漸近挙動を調べる事を目的とする。なお通常の(最も代表的な) Hartree 方程式は $n=3$, $\nu=1$ の場合 (Coulomb ポテンシャル) だが、以下の話においてもそれを最も典型的な場合として扱える。

ここで調べる漸近挙動とは，一言でいえば散乱問題である。すなわち，時間が十分たってからの解の挙動をより簡単に描写する事を考える。そのとき，もしポテンシャル $V(u)$ が十分良く減衰していれば、ポテンシャルの影響は小さいとして、自由粒子の Schrödinger 方程式の解で近似する事ができる。その自由粒子解(の初期値)から，近似される非線形方程式の解(の初期値)への対応を与えるのが波動作用素である。しかしポテンシャルの減衰が悪い場合には，そのように自由粒子で近似できる解の存在は一般には期待できない。実際，$\nu\le 1$ の場合、非線形の解には自由解と比べて本質的に

無視できないフェイズのずれが生じる事が知られている。そのずれを考慮に入れて漸近挙動の近似を与えるのが修正波動作用素—この話の中心課題である。3 次元の Coulomb ポテンシャルはちょうどずれが生じる ν の境界値に当たる。せっかくポテンシャル項を付けた以上，その効果が顕れる方が物理的に自然だし，数学的解析にも興味のある所である。

研究状況と問題点

一般に非線形偏微分方程式ではほとんどの場合，減衰が悪いほど問題は難しくなる。従って今の場合も，修正付の散乱問題の方が通常散乱より難しくなるのは当然と言える。しかし、実際に知られている結果を見比べてみると、$\nu > 1$ の場合と $\nu \leq 1$ の場合では明らかにそれ以上の差がある。具体的には，修正波動作用素においては定義域の条件が非常に強く，その一方で得られる解及び漸近収束については，与えたデータと比べて情報が落ちている (本質的には derivative loss)。そこで自然な疑問が沸く：フェイズのずれが生じる事によって、問題の性質も本質的に不連続に変化するのだろうか?

目的

それに対するここでの私の答はノーである。少なくとも，修正波動作用素に関する限りは、通常散乱とほとんど同じ結果を得る事ができる。逆に言えば，通常散乱においては修正項が見えないだけ，と表現する事すらできる。既知の結果においてそうでなかったのは，一つにはエネルギー評価における技術的問題であり，もう一つは修正の捉え方の問題であった。無論，これらは可分なものではない。というわけで，この話の目的は、修正付きの散乱理論を，通常散乱と同レベルに引き上げる事である。

ポイント

結果としては通常散乱と同様になるのだが，そこに至るための道程は，もちろん修正項の介在のために，遥かに複雑なものになる。そこで重要なのは，方程式の保存量を評価にどう反映させるか? ということに集約される。もう少し正確に言えば，L^2 が保存されるという方程式の性格を，L^2 以外のノルムの評価でいかにうまく利用するか? ということである。技術的には，

微分作用素と方程式との commutator 評価、あるいは空間差分方程式に対する L^2 評価において実現される。

既知の事

主結果を述べる前に，これまでに知られている事実を概括する。なお以下に挙げる文献では Hartree 方程式ではなく単純な冪の非線形 Schrödinger 方程式のみ扱っているものもあるが、Hartree 方程式に置き換えるのに本質的困難は何も無い。結果自体は Hartree 方程式の場合に翻訳してあるので注意。

まず基本的な事として Hartree 方程式では 全電荷 $\|u(t)\|_{L^2_x}^2$ および 全エネルギー

$$E(u) = \int |\nabla u|^2 dx + \iint \frac{V(x-y)}{2} |u|^2(x)|u|^2(y)dxdy \tag{3}$$

は時間に依らない保存量である。また，擬共形電荷に関して次の等式が成り立つ。

$$\begin{aligned}&\partial_t \left\{ \|xu - it\nabla u\|_{L^2_x}^2 + \frac{t^2}{2}\langle V(u), |u|^2\rangle_{L^2} \right\} \\ &= t\langle (V_0 + x\cdot\nabla V_0) * |u|^2, |u|^2\rangle_{L^2},\end{aligned} \tag{4}$$

ただしここで $V_0 := \lambda|x|^{-\nu}$ はポテンシャルの中の積分核である。もっとも、今回の結果では L^2 保存しか使わない。

※ 大域解 (wellposed)

時間大での挙動を考えるにはまず解の大域存在が必要となる。Hartree 方程式の初期値問題は，$0 < \nu < 2$ の場合ポテンシャルの符号に関係無く L^2 及び H^1 で大域的に適切、$2 \le \nu < 4$ の場合 $\lambda \ge 0$ ならば H^1 で大域的に適切である。後者の場合もし $\lambda < 0$ ならば爆発解が存在する。ここで $H^s = \{\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \mid (1+|x|)^s \mathcal{F}\varphi \in L^2\}$, $\mathcal{F}$ は Fourier 変換。

ただし厳密には，L^2 解を考える場合，時間局所的に $L_{t,x}^{2+4/n}$ である解のクラスで考える必要があるが、適切性により，十分減衰の良い解で近似できる解全体はそのようなクラスで閉じている。この話では常に（暗黙の内に）そのような解のクラスで考える。

※ 波動作用素

通常の波動作用素に関しては次が知られている。ただし $U(t)=e^{-i\Delta/(2t)}$ は自由 Schrödinger 方程式の一径数群。

(1) $2\le\nu<4,\ \lambda\ge 0$ の場合，任意の $\varphi\in H^1$ に対して $t\to\infty$ で $U(-t)u(t)\to\varphi$ と H^1 で収束するような Hartree 方程式の解 u が一意に存在する。[4]

(2) $1<\nu\le 2,\ s\ge 1-\nu/2$ の時，任意の $\varphi\in\mathcal{F}H^s$ に対し $\mathcal{F}H^s$ で上と同様の収束をする解 u が一意に存在する。[16] ($s=1-\nu/2$ の場合については [12] を参照)

(3) $\nu\le 1$ では，非自明解 u に対して $U(-t)u(t)$ は一般に L^2 で収束しない。[11]

※ 漸近完全性

全ての非線形解の漸近挙動が波動作用素で記述できるということが漸近完全性である。この場合、解の時間減衰をあらかじめ仮定できないので、波動作用素の構築に比べて本質的な難しさがある。$2<\nu<4,\ \lambda\ge 0$ の場合，全ての H^1 解 u について $U(-t)u(t)$ は $t\to\infty$ のとき H^1 で収束する [5]。$4/3\le\nu\le 2,\ \lambda\ge 0$ の場合，$\mathcal{F}H^1$ から出発する全ての解 u について同様の収束が $\mathcal{F}H^1$ で得られる。[11] ($\nu=4/3$ の場合については [2, 15] を参照)

※ 修正散乱

フェイズの修正項のため

$$\tau(t):=\begin{cases}(\log t)/2, & (\nu=1)\\ t^{\nu-1}/(2(\nu-1)), & (\nu<1)\end{cases} \tag{5}$$

とおく。以下のような結果が知られている。

(1) $n\ge 2,\ \nu=1,\ \varphi\in\mathcal{F}H^2$ は $\mathcal{F}(H^{1/2-}\cap H^{1/2+})$ で十分小とすると，$i=1,2,3$ に対し $\|u(t)-v_i(t)\|_{L^2}\to 0\ (t\to\infty)$ となる解 u が一意に

存在する。ただしここで v_i は以下で定義される関数である。[3]

$$\begin{aligned} v_1 &= \mathcal{F}^{-1} e^{-iV(\mathcal{F}\varphi)\tau(1/t)} \mathcal{F} U(t)\varphi, \\ v_2 &= U(t) e^{i|x|^2/(2t)} \mathcal{F}^{-1} e^{-iV(\mathcal{F}\varphi)\tau(1/t)} \mathcal{F}\varphi, \\ v_3 &= e^{-iV(\mathcal{F}\varphi)(x/t)\tau(1/t)} U(t)\varphi. \end{aligned} \tag{6}$$

(2) $n \geq 3$, $1/2 < \nu \leq 1$, $\varphi \in \mathcal{F}H^{k+2}$, $k \in \mathbb{N}$ 十分大のとき、次を満たす解 u が $\mathcal{F}H^k$ で一意に存在する。[6]

$$U(-t) e^{iV(\mathcal{F}\varphi)(x/t)\tau(1/t)} u(t) \to \varphi \quad \text{in } \mathcal{F}H^{k-1} \text{ as } t \to \infty. \tag{7}$$

(3) $n \geq 3$, $0 < \nu \leq 1/2$ ではさらに高次の修正を付けて同様の結果が成り立つ。詳しくは [7] を参照。

(4) $n \geq 2$, $1/2 < \nu \leq 1$, $k \geq [n/2] + 2$, $u(0) \in \mathcal{F}H^k$ でノルムが十分小さい時，解 u に対して $\|u(t) - v_3(t)\|_{L^2} \to 0$ を満たすような $\varphi \in \mathcal{F}H^{k-2}$ が一意に存在する。ただし v_3 は (6) と同じ。[8]

(5) $n \geq 1$, $1/2 < \nu \leq 1$, $u(0) \in H^{n+2} \cap \mathcal{F}H^{n+2}$ で十分小のとき ($n = 1$ では $e^{-\beta|x|^2} L^2$ $(\beta > 0)$ で小)，上と同様な $\varphi \in \mathcal{F}H^{n+2}$ が一意に存在する。[9]

主結果

τ は (5) で定義された通りとする。以下の二つの定理がこの話の主結果である。

定理 1. $n \geq 2$, $\nu = 1$, $s > 1 - \nu/2 = 1/2$ とする。このとき、任意の $\varphi \in \mathcal{F}H^s$ に対して次を満たす解 u が一意に存在する。$U(-t)u(t) \in C(\mathbb{R}; \mathcal{F}H^s)$ かつ、$t \to \infty$ のときに $\mathcal{F}H^s$ において

$$\mathcal{F}^{-1} e^{iV(\mathcal{F}\varphi)\tau(1/t)} \mathcal{F} U(-t) u(t) \to \varphi. \tag{8}$$

これで定まる修正波動作用素 $W : \varphi \mapsto u(0)$ は、$\mathcal{F}H^s$ 全体からその中の開集合への同相写像である。$t \to -\infty$ でも同様の結果が成り立つ。

定理 2. $n \geq 3$, $1/2 < \nu < 1$, $1 > s > 1 - \nu/2$ の時，上と同じ結果が成り

これらは、スケール不変の臨界指数 $s=1-\nu/2$ の場合を除き，通常散乱の結果の延長になっている。$s<1$ という制限は技術的なものと思われる。

以下ではこれらの証明について解説する。なお、詳しい証明についてはそれぞれ [13], [14] を参照されたい。

初期値問題への変換

散乱問題で鍵となるのは、波動が空間的に拡散していく事による減衰を測る事だが、その減衰には空間的なものと時間的なものの二つの要素がある。Schrödinger 方程式においてはそれを擬共形反転と呼ばれる変換を用いて純粋に時間減衰だけの問題に帰着する事ができる。この方法は，フェイズのずれが見易くなるだけでなく，空間減衰が通常の Sobolev ノルムに置き換わるので $\mathbb{R}^n$ 上の調和解析的手法がそのまま使えるという利点がある。擬共形反転は次のように時空関数を変換する。

$$u \mapsto u^* = (it)^{-n/2} e^{|x|^2/(2it)} \overline{u}(1/t, x/t). \tag{9}$$

このとき、u が元の Hartree 方程式の解であれば u^* は次の変形 Hartree 方程式の解になる。

$$2i\dot{u}^* - \Delta u^* + |t|^{\nu-2} V(u^*) u^* = 0. \tag{10}$$

元の時空で $t \to \pm\infty$ は変換先の時空で $t \to \pm 0$ に対応し，u と u^* は次の等式で対応付けられる。

$$\mathcal{F}U(-t)u(t) = (2\pi)^{n/2} \overline{U(-1/t) u^*(1/t)}. \tag{11}$$

したがって、$\mathcal{F}H^s$ で $t \to \pm\infty$ の漸近挙動を調べる事は H^s で $t \to \pm 0$ の初期値問題を考える事に対応する。以下では，$t>0$ のみ考える。

フェイズの修正

変換後の方程式 (10) においては $|t|^{\nu-2}$ の項により，$\nu \le 1$ で特異性が生じる事は明らかである。その際 Δ の項は時間的特異性は無いので無視できると考えると，常微分方程式

$$2i\dot{u}^* + t^{\nu-2} V(u^*) u^* = 0 \tag{12}$$

を得る。この一般解は

$$u^* = e^{iV(\varphi)\tau(t)}\varphi \tag{13}$$

の形で書ける（τ は (5) の通り）から、(10) の解 u^* も、$\varphi = \varphi(x)$ とした形で近似できると期待される。ところが一方，通常散乱の場合は $u = U(t)\varphi$ が良い近似である事が分っている。こうなると、これら二つのユニタリ作用素は非可換なので適切な修正の入れ方は明らかでは無くなってくる。例えば，次の 3 つが考えられる。

$$\begin{aligned} u^* &= U(t)e^{iV(\varphi)\tau(t)}w_1(t), \\ u^* &= e^{iV(\varphi)\tau(t)}w_2(t), \\ u^* &= e^{iV(\varphi)\tau(t)}U(t)w_3(t). \end{aligned} \tag{14}$$

実はこれらは上の v_1, v_2, v_3 (6) に対応する。さらに，上の主定理は

$$\lim_{t\to+0} w_1(t) = \varphi \quad \text{in } H^s \tag{15}$$

ということに他ならない。つまり我々は w_1 の形の修正を採用する。従来の非線形修正散乱では v_2 あるいは v_3 が主に使われていた。その理由はポテンシャルの評価が次の等式によりほとんど自明になるからである:

$$V(u^*) = V(w_2) = V(U(t)w_3). \tag{16}$$

w_1 ではこうはいかない。しかし w_2, w_3 の致命的欠点は、それらに対する方程式がフェイズ由来の微分を含む項を持つために，エネルギー評価で derivative loss を起こしてしまう事である。これが修正散乱の結果を劣化させる原因であった。

他方，w_1 は次の方程式を満たす。

$$2i\dot{w} + t^{\nu-2}e^{-i\Phi}\{U(-t)V(u^*)U(t) - V(\varphi)\}e^{i\Phi}w = 0, \tag{17}$$

ただし $\Phi = V(\varphi)\tau(t)$. これはフェイズの項が残っていて一見複雑に見えるが、重要な事は、微分を含まないので derivative loss は生じないということである。欠点は修正項 $e^{-i\Phi}$ と $e^{i\Phi}$ が単純に対消滅できずに残っている事（ポテンシャルの中身でも同じ事が起こっている）だが，それはちゃんと克服できる。$\nu < 1$ の場合にそれを克服する所が証明では最大の山場となる。

なお、上の修正が $\nu \leq 1/2$ の時には不十分なことは、Δu に 代入してみればすぐ分る。

$$\Delta(e^{iV(\varphi)\tau(t)}\varphi) \sim \tau^2 \sim t^{2(\nu-1)} \tag{18}$$

だからこれが $\nu \leq 1/2$ の場合には特異（非可積分）になる、つまり Δ の項も時間特異性を持つので，その分も修正してやらねばならない。ここではこの問題にはこれ以上深入りしない。

証明の方針

ここでは主に定理 1 の場合について説明しよう。ポイントを列挙すると以下のようになる。

(1) w の初期値問題 (17), $w(0) = \varphi$ を 逐次代入法で解く。

(2) $\|w\|_{H^s}$ をエネルギー等式で評価。

(3) $U(-t)V(u^*)U(t) - V(u^*)$, $V(u^*) - V(\varphi)$ について $t \to 0$ での時間減衰を次の二つの方法で得る。

(4) $U(-t)V(u^*)U(t) - V(u^*)$ については $V(u^*)$ の合成積による正則化効果を利用。保存則の性質により，微分を V に押し付ける。

(5) $V(u^*) - V(\varphi)$ は方程式 (10) を使って評価。

(6) 保存則が使えるように逐次代入法の方程式系を組む。

以下でもう少し詳しく解説する。初期値問題の方程式を

$$\begin{cases} 2i\dot{w} + t^{\nu-2}Tw = 0, \\ w(0) = \varphi, \end{cases} \tag{19}$$

と書く。

逐次近似列

関数列 w_k, u_k, V_k を帰納的に定義する。まず $w_0 = \varphi, \Phi = V(\varphi)\tau(t)$ とし、

$$u_k = U(t)e^{i\Phi}w_k, \quad V_k = V(u_k), \tag{20}$$

で u_k, V_k を定め，V_{k-1} に対して w_k は次の線型方程式の解とする。

$$\begin{cases} 2i\dot{w}_k + t^{\nu-2}T(V_{k-1})w_k = 0, \\ w(0) = \varphi, \end{cases} \tag{21}$$

すなわち、w の方程式でポテンシャルを独立変数と見なした系に書き換えた上での逐次近似である。こうすれば保存則の構造が損なわれない。線形の散乱問題に書き換えていると見る事もできよう。

<u>道具</u>

定理 1 の場合，フェイズの発散オーダーが log なので t^ε の形の減衰があれば log の冪で単純に評価してしまってかまわない。このため，評価はずっと簡単になる（定理 2 の場合と比べて）。実際，道具としては以下の四つのごく基本的なものの組み合わせだけで済む。ポテンシャル用の空間として $B^s := \dot{B}^{n/2}_{2,1} \cap \dot{H}^{n/2+s}$ $(s > 0)$ とおく。初めの空間は低周波，後の空間が高周波を測る。これら斉次 Besov・Sobolev 空間の定義は [1] を参照の事。

積評価： $s_0 + s_1 + s_2 > n/2$, $\min(s_0 + s_1, s_1 + s_2, s_2 + s_0) \geq 0$ のとき

$$|\langle uv, w\rangle_{L^2}| \lesssim \|u\|_{H^{s_0}}\|v\|_{H^{s_1}}\|w\|_{H^{s_2}}. \tag{22}$$

系として，$\sigma > 0$, $|s| < n/2 + \sigma$ のとき

$$\|Vu\|_{H^s} \lesssim \|V\|_{B^\sigma}\|u\|_{H^s}. \tag{23}$$

$U(t)$ 評価： $\varepsilon \in [0,1]$, $s \in \mathbb{R}$ のとき、

$$\|(U(t)-1)v\|_{H^s} \lesssim |t|^\varepsilon\|v\|_{H^{s+2\varepsilon}}. \tag{24}$$

系として，$\sigma > 0$, $|s|, |s + 2\varepsilon| < n/2 + \sigma$ のとき

$$\|\{U(-t)VU(t) - V\}v\|_{H^s} \lesssim |t|^\varepsilon\|V\|_{B^\sigma}\|v\|_{H^{s+2\varepsilon}}. \tag{25}$$

フェイズ処理： $\sigma > 0$ のとき

$$\|e^{i\Phi} - 1\|_{B^\sigma} \lesssim \|\Phi\|_{B^\sigma}^{[1,n/2+\sigma+1]}, \tag{26}$$

ここで記法：$a^{[b,c]} := \max(a^b, a^c)$ を使った。

commutator 評価：$\sigma, s, \beta, \gamma > 0$, $2s < \sigma+\beta+\gamma$, $2s < \sigma+\min(\beta,\gamma)+n/2$, $2s \leq 1 + \beta + \gamma$ のとき、

$$|\langle mu, v\rangle_{\dot{H}^s} - \langle u, \overline{m}v\rangle_{\dot{H}^s}| \lesssim \|m - C\|_{B^\sigma}\|u\|_{H^\beta}\|v\|_{H^\gamma}, \tag{27}$$

ただし C は任意の複素定数。

4 番目の評価が，regularity を損せずにエネルギー評価をするための要である。$2s \sim \sigma+\beta+\gamma$ とすると σ だけ微分が m に移っている事に注意。それでは各論に入っていこう。

$V(u)$ の評価

$V(u)$ 自体は上の　，　を用いて単純に log 冪で評価される。一方，$V(u)-V(\varphi)$ の減衰評価では，大きな解も扱えるために方程式を使うことが不可欠である（w 自身の収束だけ使うと $\nu=1$ かつ小さな解しか扱えない）。u が実数値の時空関数 A について方程式

$$2i\dot{u} - \Delta u + Au = 0, \tag{28}$$

を満たしていれば，任意の実数値・x 変数のテスト関数 ψ について

$$\langle \partial_t |u|^2, \psi \rangle_{L^2} = \Re \langle iu, u\psi \rangle_{\dot{H}^1}. \tag{29}$$

が成り立つ。ここで右辺が反対称性を持つので　の commutator 評価が使える。　、　，及び $V(u)$ の評価との補間により，次を得る。

$$\|V(u(t_1)) - V(u(t_0))\|_{B^{\sigma-1-2\theta}} \lesssim |t_1 - t_0|^\theta \|u\|^2_{L^\infty(H^s)}, \tag{30}$$

ここで $\theta \in [0,1]$, $s \geq 1/2$,

$$1 + 2\theta < \sigma < (1-\theta)\min(2s, s+n/2) + \theta \min(2s, s+n/2, 2).$$

エネルギー評価

w の H^s ノルムの時間変化は次で与えられる。

$$\begin{aligned}\Re\langle T(V)w, iw\rangle_{\dot{H}^s} =& \Re\langle e^{-i\Phi}(U(-t)VU(t) - V)e^{i\Phi}w, iw\rangle_{\dot{H}^s} \\ &+ \Re\langle (V - V(\varphi))w, iw\rangle_{\dot{H}^s}.\end{aligned} \tag{31}$$

右辺第二項はポテンシャル減衰評価と反対称性による commutator 評価で処理できる。第一項については　を $m = e^{i\Phi}$ と $m = V$ で 2 回用いる。まずフェイズ項について用いればフェイズの無い場合の評価が残るが，そ

れは次の形の反対称性を持つ：

$$
\begin{aligned}
&\Re\langle (U(-t)VU(t)-V)v, iv\rangle_{\dot H^s}\\
&= \langle V(U(t)-1)v, iU(t)v\rangle_{\dot H^s} - \langle (U(t)-1)v, iVU(t)v\rangle_{\dot H^s} \\
&\quad + \langle Vv, i(U(t)-1)v\rangle_{\dot H^s} - \langle v, iV(U(t)-1)v\rangle_{\dot H^s}.
\end{aligned} \tag{32}
$$

ここで全ての項に $U(t)-1$ が現れている事に注意すると，$m=V$ で を用いた後でさらに の減衰評価が使える。こうして、次の形のエネルギー評価が得られる。

$$
\begin{aligned}
|(31)| &\lesssim |t|^{\varepsilon}(\|V\|_{B^{\sigma+2\varepsilon}} + \|e^{i\Phi}-1\|_{B^{\sigma+2\varepsilon}}\|V\|_{B^{\sigma'}})\|e^{i\Phi}w\|_{\dot H^{s'}}^2 \\
&\quad + \|V-V(\varphi)\|_{B^{\sigma}}\|w\|_{\dot H^{s'}}^2,
\end{aligned} \tag{33}
$$

ここで $\sigma,\sigma',s>0$, $\varepsilon\in[0,1]$, $2\varepsilon<s'<n/2+\sigma'$,

$$
2s<\min(\sigma+2s', \sigma+s'+n/2, 2s'+1-2\varepsilon). \tag{34}
$$

従って特に $s>s'$ ととることができる。これは、derivative loss を回避しただけでなく，余分な regularity（$s-s'$）まで得られた事を意味する。この事は，修正波動作用素の強連続性などを考える時に重要な役割を果たす。

上のエネルギー評価を逐次近似列の w_k に適用すれば、w_k の H^s 評価が得られる。w_k の H^s エネルギー等式は次の形である。

$$
\partial_t\|w_k\|_{H^s}^2 = \Re\langle t^{-1}T(V_{k-1})w_k, iw_k\rangle_{\dot H^s}. \tag{35}
$$

同様に，$\delta_k w := w_k - w_{k-1}$ も H^s で評価できる。それにより、十分小さい時間において w_k が H^s で収束している事が示せる。そのためのエネルギー評価の最終形は

$$
\partial_t\|\delta_k w\|_{H^s}^2 \lesssim t^{\varepsilon/2-1}(1+W_k^4)(\|\delta_k w\|_{H^s}^2 + \sup_{0<t'<t}\|\delta_{k-1}w(t')\|_{H^s}^2),
$$

ここで $W_k := \sup_{j<k,0<t'<t}\|w_k(t')\|_{H^s}$. そこで $D_k(t) := \sup_{0<t'<t}\|\delta_k w(t')\|_{H^s}$ とおくと、Gronwall より

$$
D_k(t) \lesssim t^{\varepsilon/2}D_{k-1}(t). \tag{36}
$$

これより H^s での収束が従う。なお、十分小さい時間だけ考えておけば、その解を延ばすのは元の Hartree 方程式の時間局所的問題になるので簡単である。こうして修正波動作用素が構成される。

連続性など

上でも述べたようにエネルギー評価の中の regularity gain が H^s 強位相での色々な収束を言うのに役立つ。もう少し具体的に言えば，H^s ノルムの高周波帯への減衰が一様に評価できるので、H^s 強収束は H^s 有界性と L^2 収束に帰着できる。その高周波帯での評価は以下のように得られる。まず初期値 φ を低周波 φ_L と高周波 φ_H に分解する：

$$\varphi = \varphi_L + \varphi_H, \quad \operatorname{supp} \mathcal{F}\varphi_L \subset \{|\xi| \lesssim N\}, \operatorname{supp} \mathcal{F}\varphi_H \subset \{|\xi| \gtrsim N\}.$$

すると、w_k の方程式は線形だからこれに対応して分解される：$w_k = w_{Lk} + w_{Hk}$. このとき w_{Lk} は初期値 φ_L が滑らかだから高階のエネルギーも評価できる。実際，上のエネルギー評価により，

$$\|w_{Lk}\|_{H^{s+2\varepsilon}} \lesssim e^{C(\|\varphi\|_{H^s})t^{\varepsilon/2}} \|\varphi_L\|_{H^{s+2\varepsilon}}. \tag{37}$$

高周波帯は H^s のままで同様の評価を得るから，それらを合わせると

$$\|w_k|_{|\xi| \gtrsim N}\|_{H^s} \lesssim e^{C(\|\varphi\|_{H^s})t^{\varepsilon/2}} (N^{-2\varepsilon}\|\varphi_L\|_{H^s} + \|\varphi_H\|_{H^s}). \tag{38}$$

ここで右辺は，φ が H^s のコンパクト集合に属する時 $N \to \infty$ で一様に 0 に収束する。従ってLebesgue収束定理によって、H^s 収束は L^2 収束の問題に帰着できる。この事を用いて，修正波動作用素 W が連続単射かつ開写像である事が、上と類似のエネルギー評価の議論で示される。L^2 収束の問題なら regularity をある程度失っても良いので容易である。

定理 2 の場合

定理 1 の場合の議論では，フェイズに対しても commutator 評価を適用してはいるが，結局は $e^{i\Phi}$ の項を　の評価により log の冪を出して処理している。この方法は，フェイズの発散オーダーが $t^{\nu-1}$ となる $\nu < 1$ の場合にはもはや通用しない（ν が十分 1 に近ければ若干の結果は出せるが、いずれにせよ最良の結果は無理である)。$\nu < 1$ では、$e^{-i\Phi}$ と $e^{i\Phi}$ の間の相殺効果による時間減衰をきちんと考慮しなければならない。その効果は w の方程式にも V の中にも潜んでいる。ここで我々は w_1 の形の修正を選んだために $e^{i\Phi}$ と $U(t)$ の非可換性に悩まされる事になるが，それも最終的には克服される。どのように？その顛末をこれから見ていこう。

まずフェイズ項は Fourier 変換して評価するのは困難だから，なるべく physical space で評価する。Fourier space は周波数分解（Littlewood-Paley だけでは済まない）のためにのみ利用する。同じ理由で，H^s ノルムも空間差分を用いて評価する。この方法は，commutator 評価や高階エネルギー評価をかえって簡単化する利点もある。

次の恒等式を評価の出発点とする。

$$S(v,w) := U(t)v\overline{U(t)w} = U(t)\mathcal{F}^{-1}\int v(x+t\xi)\overline{w}(x)e^{-ix\xi}dx.$$

一番問題になるのはフェイズの影響である：

$$\begin{aligned} S_0(v,w) &:= S(e^{i\Phi}v, e^{i\Phi}w) - S(v,w) \\ &= U(t)\mathcal{F}^{-1}\int (e^{i\Phi(x+t\xi)-i\Phi(x)} - 1)v(x+t\xi)\overline{w}(x)e^{-ix\xi}dx. \end{aligned}$$

これがポテンシャルの評価で現れるのは明らかだが、w の方程式でも L^2 内積を通じて現れる。$T(V)$ のフェイズ部分を T_Φ と書くと

$$T_\Phi = e^{-i\Phi}U(-t)VU(t)e^{i\Phi} - U(-t)VU(t), \tag{39}$$

次の等式を得る。

$$\langle T_\Phi w, v\rangle_{L^2} = \langle V, S_0(v,w)\rangle_{L^2}. \tag{40}$$

エネルギー評価は空間差分 $\delta\varphi := \varphi(x+h) - \varphi(x)$ を通じて行う。方程式より，

$$\partial_t \|\delta w\|_{L^2}^2 = t^{\nu-2}\Re\langle i(\delta T)w, \delta w\rangle_{L^2}, \tag{41}$$

ここで T に差分のかからない項は消滅することに注意（保存則）。右辺のフェイズ部分はさらに

$$\langle(\delta T_\Phi)w, v\rangle_{L^2} = \langle \delta V, S_0(v,w)\rangle_{L^2} + \langle V, S_h(v,w)\rangle_{L^2} \tag{42}$$

と分解される。S_h はフェイズに差分のかかったもの。

ポテンシャルは $V(u) = V_0 * \{S_0(w,w) + |U(t)w|^2\}$ と分解され，その時間減衰は w の方程式を用いて

$$\begin{aligned} \partial_t\langle |w|^2, \psi\rangle_{L^2} =& t^{\nu-2}\Re\langle V, iS_\psi(v,w)/2\rangle_{L^2} \\ &+ t^{\nu-2}\Re\langle T_U w, i\psi w\rangle_{L^2}, \end{aligned} \tag{43}$$

から得られる。ここで $T_U = U(-t)VU(t) - V$ は T でフェイズを除いた後の主要部分、S_ψ は S_0 にさらに反対称性を加味した

$$S_\psi(v,w) = S_0(\psi v, w) - S_0(v, \psi w). \tag{44}$$

これらの設定の下，修正波動作用素の構成のために必要な評価を列挙すると,

$$\begin{aligned} &|\Re\langle i(\delta T)w, \delta w\rangle_{L^2}| \lesssim t^{1-\nu+}|h|^{s+}\|\delta w\|_{L^2}, \\ &V(u)\text{: bounded in } B^{2s-\nu}, \\ &\|V(u) - V(\varphi)\|_{B^{0+}} \lesssim t^{1-\nu+}, \\ &|\partial_t\langle |w|^2, \psi\rangle_{L^2}| \lesssim t^{-\nu+}\|\psi\|_{B^{-\nu-}}, \end{aligned} \tag{45}$$

ただし $B^\alpha := \dot{B}^{\alpha+n/2}_{2,1}$. これらを用いて，$w_k$ の H^s 有界性及び L^2 での収束が示され，さらに最初の評価で $|h|$ の冪が上がっている事から高周波帯の一様減衰が言えて H^s での強収束に格上げされる。上の評価を得るときの主戦場はもちろんフェイズ項の処理，すなわち S_0, S_h, S_ψ に対する評価となる。例えば S_0 については次の評価が得られる。

$$\begin{aligned} \|S_0(v,w)\|_{\dot{B}^{\beta+\gamma-2\theta-n/2}_{2,1}} &\lesssim t^{\theta+(\alpha+\nu-1)\theta/\alpha}(t^{1-\nu}\|\Phi\|_{B^{2\alpha}})^{[\theta/\alpha,m]} \\ &\quad \times \|v\|_{\dot{H}^\beta}\|w\|_{\dot{H}^\gamma}, \end{aligned} \tag{46}$$

ただし $0 \le \theta \le \alpha < 1/2$, $\beta, \gamma < n/2$, $0 < \beta + \gamma < n/2$,

$$(\alpha - 1)n/2 + \max(\beta, \gamma) < \theta, \tag{47}$$

で $m \in \mathbb{N}$ はそれらに応じて十分大とする。実際には $\alpha = s - \nu/2 > 1 - \nu$ と採る。$\beta + \gamma$ の上限から $n \ge 3$ が必要となる。この証明はまず全ての関数を Littlewood-Paley 分解し，周波数の大小関係に応じて適切な評価方法を採る。具体的には，φ_I を φ の 2 進周波数帯 $|\xi| \sim I$ への Littlewood-Paley 射影とすると、$\Psi(x, t\xi) := e^{i\Phi(x+t\xi)-i\Phi(x)} - 1$ とおけば

$$S_0(v,w) = \sum_{I,J,K,N:dyadic} \left\{ U(t)\mathcal{F}^{-1} \int \Psi_I(x,t\xi) v_J(x+t\xi) \overline{w_K}(x) e^{-ix\xi} dx \right\}_N$$

と分解できる。ただし、I, J, K, N はそれぞれ 集合 $\{2^j \mid j \in \mathbb{Z}\}$ 上を動く。この和の各項に対するフェイズの処理は次の 3 つに場合分けして考える:

(1) $J \sim K \gtrsim N$ の場合，$\|\Psi\|_{L_x^\infty}$,

(2) $I \gtrsim J, K, N$ の場合，$\|\Psi_I\|_{L^{n/(\beta+\gamma)}x}$,

(3) $I, J \lesssim N \sim K$ の場合，w_K をさらに Fourier support がサイズ $\sim I+J$ の関数に分解した上で，$\|\Psi_I\|_{L_x^{n/\beta}}$ で評価。

最後の場合についてもう少し詳しく書けば，($\beta \geq 0$ の場合のみ)

$$\begin{aligned}\left\|\int \Psi_I v_J \overline{w_K} e^{-ix\xi} dx\right\|^2_{L^2(|\xi|\sim N)} &\lesssim \sum_\kappa \left\|\int \Psi_I v_J \overline{w_K^\kappa} e^{-ix\xi} dx\right\|^2_{L^2(|\xi|\sim N)} \\ &\lesssim \sum_\kappa |\tilde{\kappa}| \|w_K^\kappa\|^2_{L^2} \left\|\int |\Psi_I v_J|^2 dx\right\|_{L^\infty(\xi\in\tilde{\kappa})} \\ &\lesssim (I+J)^n \|w_K\|^2_{L^2} \|\Psi_I\|^2_{L^\infty_{|\xi|\sim N} L_x^{n/\beta}} \|v_J\|^2_{\dot{H}^\beta},\end{aligned}$$

ただし κ は w_K の Fourier support $\{|\xi| \sim K\}$ を 分解した $I+J$ サイズの cube 全体を尽くし，w_K^κ はそこへの Fourier 射影, $\tilde{\kappa}$ は cube κ の適当な拡大 cube を表す。フェイズが最大周波数を持つ場合 (つまり (2) の場合) には Ψ_I を cubic 分解したい所だが，Ψ の ξ 依存性のために困難が生じる。その代償として $\beta+\gamma < n/2$ の条件が必要となってしまう。Ψ_I の Lebesgue ノルムの評価は Besov 空間の差分ノルムの階数によって得られる評価が変わってくるので注意を要する。S_h, S_ψ の評価も同様の議論で行う。

未解決点

最後に主な身解決問題（のうち比較的手頃と思われるもの）を挙げて締め括りとする。

(1) 非線形 Schrödinger ： $2i\dot{u} - \Delta u + |u|^{p-1}u = 0$. 特に一次元で三次の非線形項の場合は最も典型的な場合であり，スケールなど考慮すると $\nu = 1$ の場合に相当するはずだが、我々の方法はポテンシャル項が s より高い regularity を持つ事に本質的に依存している。それは $V(u) = |u|^2$ の場合には単純なソボレフ評価では不可能である。しかし分散波動の特性を利用すれば，とくに Fourier restriction norm method を用いて $|u|^2$ において何らかの smoothing 効果を使う事ができれば，うまく行くかもしれない。その場合，上のような時刻各点での議論では難しいと思われる。

(2) 低次のポテンシャル $\nu \leq 1/2$：上で見たようにこの場合は Δ の項も時間特異性を呈し，それを除くためにさらに高階の近似が必要となるが，そのために u の方程式で考えているとやはり derivative loss が起こる。この場合はフェイズの中でそれが起こるのでなおさら厄介である。どのように修正を入れれば良いか，という問題はますます難しくなる。もちろん，その後の評価もそうだが。

(3) スケール臨界指数 $s = 1 - \nu/2$：この場合，時間積分の評価は必然的に t^{-1} になり発散するが，修正波動作用素にも特異性が生じるかどうか? 生じるとすればそれが通常散乱との違いということになるし，生じなければ方程式と同じスケールの空間で散乱ができる事になるのでどちらに転んでも面白い問題である。

他にも，定理2で $n \leq 2$ や $s \geq 1$ ではどうなるか? ということから，w_2 や w_3 の修正だと本当に regularity が失われるのか?，反発力の場合なら全ての解が修正波動作用素で記述できるのか?（漸近完全性），解の漸近展開という形で全ての ν について統一された散乱理論を構築できるか?，ソリトンなどの非線形特殊解の周りでの修正散乱は?，Schrödinger 以外の方程式ではどうか?，場の方程式におけるゲージ変換との関係は? などなど，問題は尽きない。非線形修正散乱の真の発展はまだこれからであろう。それがどんな方向に向かうにせよ，非線形問題では非常にしばしば、同じ空間で閉じた評価の輪が，線形空間に変わる閉じた世界として基礎的な役割を果たす。今回の結果はその第一歩を踏み出すものである。これが解析法としても現象論としても更なる発展につながって行くことを祈って，ここでこの原稿を終えたい。

References

1. J. Bergh and J. Löfström, *Interpolation spaces*, Springer, Berlin/Heiderberg/New York, 1976.
2. T. Cazenave and F. B. Weissler, *Rapidly decaying solutions of the nonlinear Schrödinger equation*, Commun. Math. Phys. **47** (1992), 75–100.
3. J. Ginibre and T. Ozawa, *Long range scattering for nonlinear Schrödinger and Hartree equations in space dimension* $n \geq 2$, Comm. Math. Phys. **151** (1993), 619–645
4. J. Ginibre and G. Velo, *On a class of nonlinear Schrödinger equations with nonlocal interaction*, Math. Z. **170** (1980), no. 2, 109–136.

5. J. Ginibre and G. Velo, *Scattering theory in the energy space for a class of non-linear Schrödinger equations*, *J. Math. Pures Appl.* **64**, (1985), 363–401.
6. J. Ginibre and G. Velo, *Long range scattering and modified wave operators for some Hartree type equations I*, Rev. Math. Phys. **12** (2000), 361–429.
7. J. Ginibre and G. Velo, *Long range scattering and modified wave operators for some Hartree type equations II*, Ann. Henri Poincaré **1** (2000), 753–800.
8. N. Hayashi and P. I. Naumkin, *Remarks on scattering theory and large time asymptotics of solutions to Hartree type equations with a long range potential*, SUT J. Math. **34** (1998), no. 1, 13–24.
9. N. Hayashi and P. I. Naumkin, *Scattering theory and large time asymptotics of solutions to the Hartree type equations with a long range potential*, Hokkaido Math. J. **30** (2001), 137–161.
10. N. Hayashi, P. I. Naumkin and T. Ozawa, *Scattering theory for the Hartree equation*, SIAM J. Math. Anal. **29** (1998), 1256–1267.
11. N. Hayashi and Y. Tsutsumi, *Scattering theory for Hartree type equations*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. **46** (1987), 187–213.
12. K. Nakanishi, *Asymptotically free solutions for short range nonlinear Schrödinger equations*, SIAM J. Math. Anal. **32** (2001), 1265-1271.
13. K. Nakanishi, *Modified wave operators for the Hartree equation with data, image and convergence in the same space*, to appear in Comm. Pure Appl. Anal.
14. K. Nakanishi, *Modified wave operators for the Hartree equation with data, image and convergence in the same space, II*, preprint.
15. K. Nakanishi and T. Ozawa, *Remarks on scattering for nonlinear Schrödinger equations*, preprint.
16. H. Nawa and T. Ozawa, *Nonlinear scattering with nonlocal interaction*, Comm. Math. Phys. **146** (1992), 259–275.
17. T. Ozawa, *Long range scattering for nonlinear Schrödinger equations in one space dimension*, Comm. Math. Phys. **139** (1991), 479–493.